то есть, плоскости $(A_i A_3 A_4)$ неподвижны вдоль линий $\omega^j = 0$.

2/Асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) определяются соответственно уравнениями:

$$\Lambda_3^4 (\omega^2)^2 = 0, \quad \Lambda_4^3 (\omega^1)^2 = 0,$$

значит поверхности (A_3) и (A_4) -торсы.

3/Имеем:

$$dA_2\big|_{\omega^1=0} = \omega_2^2 A_2 + \omega_2 A_4; \quad dA_1\big|_{\omega^2=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3,$$

$$dA_3\big|_{\omega^1=0} = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4; \quad dA_4\big|_{\omega^2=0} = \omega_4^4 A_4 + \omega_4^3 A_3,$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

I.М а л а х о в с к и й В.С.Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Труды геом.семинара, ВИНИТИ АН СССР,М.,I969, 2,с.I79-206.

2.К о р с а к о в а Л.Г.Расслояемые пары конгруэнций коник, касающихся линии пересечения своих плоскостей. -В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.4.Калининград,I974,с.44-64.

3.К о р с а к о в а Л.Г. О некоторых характеристиках расслояемых пар конгруэнций фигур.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.8,Калининград, I977,с.I8-3I.

4.Ф и н и к о в С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.- Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та, I95I,№ I6,вып.3,с.235-260.

М.В.К р е т о в

О КОМПЛЕКСАХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) K_3 центральных квадрик (эллипсоидов). Рассмотрен специальный класс комплексов K_3, для которого изучено характеристическое многообразие. Найдены характеристическое и фокальное многообразия нескольких подклассов комплексов K_3 в случае, когда многообразие центров вырождается в точку. Исследован комплекс K_{32} эллипсоидов $\widetilde{Q}$, центр которых описывает поверхность Φ, причем аффинная нормаль в каждой точке поверхности Φ сопряжена относительно эллипсоида $\widetilde{Q}$ касательной плоскости.

§I. Построение репера

Отнесем комплекс K_3 эллипсоидов к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (i, j, k = 1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнение эллипсоида $\widetilde{Q}$ имеет вид

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j + a_i x^i - 1 = 0. \tag{1.3}$$

Используя уравнение стационарности точки в аффинном пространстве

$$dx^i = -x^k\omega_k^i - \omega^i, \qquad (1.4)$$

получим

$$(da_{ij} - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k)x^i x^j +$$
$$+ (da_i - a_{ji}\omega^j - a_{ij}\omega^j - a_k\omega_i^k)x^i - a_i\omega^i = 0. \qquad (1.5)$$

Тогда из условия стационарности эллипсоида будем иметь:

$$\Delta a_{ij}x^i x^j + \Delta a_i x^i - a_i\omega^i - \theta = 0, \qquad (1.6)$$

где $\Delta a_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k - \theta a_{ij}$, (1.7)

$$\Delta a_i = da_i - a_{ji}\omega^j - a_{ij}\omega^j - a_k\omega_i^k. \qquad (1.8)$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символами $\pi^i, \pi_i^j, \mathring{\Delta} a_{ij}, \mathring{\Delta} a_i$ значение форм $\omega^i, \omega_i^j, \Delta a_{ij}, \Delta a_i$ при фиксированных первичных параметрах. Тогда получим:

$$\mathring{\Delta} a_{ij} = -a_{kj}\pi_i^k - a_{ik}\pi_j^k - a_i a_{ij}\pi^i, \qquad (1.9)$$

$$\mathring{\Delta} a_i = -a_{ji}\pi^j - a_{ij}\pi^j - a_k\pi_i^k. \qquad (1.10)$$

Легко видеть, что фундаментальным объектом первого порядка [1] комплекса K_3 будет объект:

$$\Gamma = \{a_{ij}, a_i\}. \qquad (1.11)$$

Так как K_3 -трехпараметрическое многообразие, то

$$\mathrm{rang}\{\Delta a_{ij}, \Delta a_i\} = 3. \qquad (1.12)$$

Аналитически канонизацию репера проведем следующим образом:

$$a_{ij} = \delta a, \quad a_i = 0. \qquad (1.13)$$

Тогда получим

$$\mathring{\Delta} a_{ij} = -\pi_i^j - \pi_j^i, \quad \mathring{\Delta} a_i = -2\pi^i. \qquad (1.14)$$

Из формул (I.14) следует, что структурными формами эллипсоида $\widetilde{Q}$ являются формы Пфаффа: ω^i, ω_i^i (по i не суммировать!), $\omega_1^2 + \omega_2^1$, $\omega_2^3 + \omega_3^2$, $\omega_1^3 + \omega_3^1$.

На основании леммы Н.М.Остиану [2] можно утверждать, что канонизация репера проведена корректно.

Геометрически репер характеризуется следующим образом: A -центр эллипсоида, векторы $\overline{e}_i$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, причем концы $\overline{e}_i$ лежат на эллипсоиде. При этом

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0. \qquad (1.15)$$

Принимая формы ω^i за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_3 в виде

$$\omega_i^i = a_{ik}\omega^k, \quad \omega_i^{i+1} + \omega_{i+1}^i = b_{ik}\omega^k, \qquad (1.16)$$

где $\omega_{i+3}^{j+3} \overset{def}{=} \omega_i^j$.

В работе [3] показано, что геометрический объект $\Gamma = \{a_{ij}, b_{ij}\}$ является основным геометрическим объектом комплекса K_3.

§ 2. Комплекс K_3°

О п р е д е л е н и е 1. Комплекс эллипсоидов K_3, в котором на эллипсоиде $\widetilde{Q}$ имеются, по крайней мере, три фокальные точки A_i, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяющие три сопряженных направления, называется комплексом K_3°, если прямая (AA_1) описывает цилиндрическую поверхность.

Т е о р е м а 2.1. Комплекс K_3° существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Специализируем репер R таким образом, чтобы концы векторов $\overline{e}_i$ совпадали соответственно с фокальными точками A_i. Такой репер будет каноническим. Тогда система уравнений Пфаффа комплекса K_3° запишется в виде:

$$\omega_i^i = -\omega^i, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \qquad (2.1)$$

$$\omega_i^j = b_{ik}^j\omega^k, \text{ где } i \neq j, \ i \neq 1. \qquad (2.2)$$

Замыкая уравнение $\omega_1^1 = -\omega^1$ и применяя лемму Картана, получим

$$\omega_2^1 = \alpha\,\omega^2 + \beta\,\omega^3, \quad \omega_3^1 = \beta\,\omega^2 + \gamma\,\omega^3. \tag{2.3}$$

Замыкание уравнения $\omega_2^2 = -\omega^2$, в общем случае, будет давать соотношение

$$\omega_2^3 = \lambda\,\omega_3^2 - \omega^3. \tag{2.4}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_3^3 = -\omega^3$, получим следующие соотношения:

$$b_{31}^2 = 0, \quad b_{32}^2 = \lambda b_{33}^2 - 1. \tag{2.5}$$

Система уравнений Пфаффа комплекса K_3° теперь запишется в виде:

$$\omega_i^i = -\omega^i, \ \omega_1^2 = 0, \ \omega_2^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3, \omega_1^3 = 0, \ \omega_3^1 = \beta\omega^2 + \gamma\omega^3, \ \omega_2^3 = \lambda\omega_3^2 - \omega^3, \ \omega_3^2 = (\lambda b_{33}^2 - 1)\omega^2 + b_{33}^2\,\omega^3. \tag{2.6}$$

Чистое замыкание [4] системы (2.6) имеет вид:

$$\begin{gathered}
d\alpha \wedge \omega^2 + d\beta \wedge \omega^3 - \alpha\,\omega^1 \wedge \omega^2 - \beta\,\omega^1 \wedge \omega^3 + c_1\,\omega^2 \wedge \omega^3 = 0,\\
d\beta \wedge \omega^2 + d\gamma \wedge \omega^3 - \beta\,\omega^1 \wedge \omega^2 - \gamma\,\omega^1 \wedge \omega^3 + c_2\,\omega^2 \wedge \omega^3 = 0,\\
d\lambda \wedge \omega_3^2 + c_3\,\omega^2 \wedge \omega^3 = 0,\\
d\lambda \wedge b_{33}^2\,\omega^2 + d b_{33}^2 \wedge (\lambda\omega^2 + \omega^3) + c_4\,\omega^2 \wedge \omega^3 = 0,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$C_1 = 2\beta\lambda b_{33}^2 - \gamma\lambda^2 b_{33}^2 - \alpha\lambda b_{33}^2 + \lambda\gamma + \alpha - \beta,$$

$$C_2 = \lambda b_{33}^2 - \gamma^2 b_{33}^2 + \gamma - \beta,$$

$$C_3 = \lambda^2 b_{33}^2 + \lambda b_{33}^2 + b_{33}^2 - \lambda - 1,$$

$$C_4 = \lambda^2 (b_{33}^2)^2 + \lambda (b_{33}^2)^2 + \lambda b_{33}^2 - 2 b_{33}^2.$$

Из (2.6),(2.7) следует, что

$$S_1 = 4, \ S_2 = 1, \ S_3 = 0, \ N = Q = 6. \tag{2.8}$$

Система (2.6),(2.7)- в инволюции и определяет комплексы K_3° с произволом одной функции двух аргументов. Теорема доказана.

Для комплекса K_3° доказаны следующие теоремы:

Т е о р е м а 2.2. Индикатриса векторов $\bar{e}_1$ вырождается в линию с касательной, коллинеарной вектору $\bar{e}_1$.

Т е о р е м а 2.3. Касательная плоскость к поверхности $(B_i) = (A + \bar{e}_i)$ коллинеарна координатной плоскости $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_k)$, где $j \neq i$, $k \neq i$.

Т е о р е м а 2.4. Характеристическое многообразие [5] эллипсоида $\widetilde{Q}$, ассоциированное с комплексом K_3°, содержит, по крайней мере, шесть действительных точек.

§ 3. Комплексы эллипсоидов с вырождающимся в точку многообразием центров

Отнесем комплекс эллипсоидов с вырождающимся в точку многообразием центров K_{30} к реперу R, построенному в §I. Принимая формы $\theta^1 = \omega_1^2 + \omega_2^1$, $\theta^2 = \omega_2^3 + \omega_3^2$, $\theta^3 = \omega_3^1 + \omega_1^3$ за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_{30} в виде:

$$\omega_i^i = A_{ik}\,\theta^k, \quad \omega^i = 0. \tag{3.1}$$

Замыкая систему (3.1), можно показать, что геометрический объект $\Gamma = \{A_{ij}\}$ является основным геометрическим объектом комплекса K_{30}.

Характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$, ассоциированное с комплексом K_{30}, определяется следующей системой:

$$\begin{gathered}
F_1 \equiv A_{11}(x^1)^2 + A_{21}(x^2)^2 + A_{31}(x^3)^2 + x^1 x^2 = 0,\\
F_2 \equiv A_{12}(x^1)^2 + A_{22}(x^2)^2 + A_{32}(x^3)^2 + x^2 x^3 = 0,\\
F_3 \equiv A_{13}(x^1)^2 + A_{23}(x^2)^2 + A_{33}(x^3)^2 + x^1 x^3 = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

О п р е д е л е н и е 2. Комплекс K_{30}, в котором на эллипсоиде $\widetilde{Q}$ имеется, по крайней мере, три фокальные точки A_i, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяют три сопряженных направления, называется комплексом K^*_{30}.

Т е о р е м а 3.1. Комплекс K^*_{30} существует и определяется с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Специализируем репер таким образом, чтобы концы векторов $\overline{e}_i$ совпадали соответственно с фокальными точками A_i. Такой репер будет каноническим. Система уравнений Пфаффа комплекса K^*_{30} имеет вид:

$$\omega^i_i=0,\ \omega^i=0,\ \omega^2_1=\alpha\theta^1,\ \omega^3_1=\beta\theta^3,\ \omega^3_2=\gamma\theta^2. \quad (3.3)$$

Замкнутая система (3.3) в инволюции и определяет комплексы K^*_{30} с произволом трех функций одного аргумента. Теорема доказана. Имеет место:

Т е о р е м а 3.2. Индикатриса векторов $\overline{e}_i$, ассоциированная с комплексом K^*_{30}, является поверхностью с касательной плоскостью, коллинеарной векторам $\overline{e}_j$, $\overline{e}_k$, где $j,k=1,2,3;\ j,k\neq i$.

О п р е д е л е н и е 3. Комплекс K^*_{30}, у которого прямая (AA_1) описывает цилиндрическую поверхность, назовем комплексом K^0_{30}.

О п р е д е л е н и е 4. Комплекс K^*_{30} называется комплексом K^1_{30}, если координатные плоскости образуют однопараметрическое семейство.

Т е о р е м а 3.3. Комплексы K^s_{30} $(s=0,1)$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Репер R специализируем также, как в теореме 3.1. Из определения комплексов K^s_{30} следует, что их системы уравнений Пфаффа соответственно имеют вид:

$$\omega^i_i=0,\ \omega^i=0,\ \omega^2_1=0,\ \omega^3_1=0,\ \omega^3_2=\gamma\theta^2, \quad (3.4)$$

$$\omega^i_i=0,\ \omega^i=0,\ \omega^2_1=\alpha\theta^1,\ \omega^3_1=0,\ \omega^3_2=0. \quad (3.5)$$

Чистые замыкания систем (3.4), (3.5) состоят из следующих уравнений:

$$d\gamma\wedge\theta^2=0, \quad (3.6)$$

$$d\alpha\wedge\theta^1=0. \quad (3.7)$$

Теорема доказана.

Для характеристического и фокального многообразий эллипсоидов $\widetilde{Q}$, ассоциированных с комплексами K^*_{30}, K^s_{30}, доказаны две теоремы.

Т е о р е м а 3.4. Характеристическое многообразие состоит из четырех двукратных объектов: точки $(0,0,0)$ и прямых $(A\overline{e}_i)$.

Т е о р е м а 3.5. Фокальное многообразие состоит из шести точек, три из которых являются концами векторов $\overline{e}_i$, а остальные диаметрально им противоположны.

§ 4. Комплекс эллипсоидов с вырождающимся в поверхность многообразием центров

Рассмотрим комплекс K_{32} [6] эллипсоидов $\widetilde{Q}$, центр которых описывает поверхность Φ, причем аффинная нормаль в каждой точке поверхности Φ сопряжена относительно эллипсоида $\widetilde{Q}$ касательной плоскости.

Т е о р е м а 4.1. Комплекс K_{32} существует и определяется с произволом трех функций трех аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем комплекс K_{32} к реперу $R=\{A,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$, где A – центр эллипсоида $\widetilde{Q}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ направлены по асимптотическим линиям поверхности Φ, а $\overline{e}_3$ – по аффинной нормали и концы векторов инцидентны эллипсоиду $\widetilde{Q}$. Репер R – канонический. Уравнение эллипсоида $\widetilde{Q}$ имеет вид:

$$F\equiv(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+2\lambda x^1x^2-1=0. \quad (4.1)$$

Так как $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ расположены в касательной плоскости, то

$$\omega^3=0. \quad (4.2)$$

Замыкая уравнение (4.2) и используя лемму Картана, находим

$$\omega_1^3=\alpha\omega^1+\beta\omega^2,\quad \omega_2^3=\beta\omega^1+\gamma\omega^2. \tag{4.3}$$

В силу выбора репера уравнение асимптотических линий поверхности Φ имеет вид:

$$\omega^1\cdot\omega^2=0. \tag{4.4}$$

Из уравнений (4.3),(4.4) следуют соотношения:

$$\alpha=\gamma=0,\quad \beta\neq 0. \tag{4.5}$$

Откуда

$$\omega_1^3=\beta\omega^2,\quad \omega_2^3=\beta\omega^1. \tag{4.6}$$

Осуществляя частичное замыкание системы (4.6), получим

$$d\beta=\beta\omega_2^2+\beta\omega_1^1-\beta\omega_3^3. \tag{4.7}$$

Замыкание уравнения (4.7) приводит к следующим соотношениям:

$$A_{32}^2=A_{31}^1,\quad A_{33}^2=0,\quad A_{33}^1=0. \tag{4.8}$$

Так как $\{A,\overline{e}_3\}$ -аффинная нормаль, то

$$\omega_1^2=A_1^2\omega^1,\quad \omega_2^1=A_2^1\omega^2. \tag{4.9}$$

Система уравнений Пфаффа комплекса K_{32}, относительно базисных форм $\theta^1=\omega^1$, $\theta^2=\omega^2$, $\theta^3=\omega_3^3$, имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega^3=0,\ \omega_1^2=A_1^2\theta^1,\ \omega_2^1=A_2^1\theta^2,\ \omega_1^3=\beta\theta^2,\ \omega_2^3=\beta\theta^1,\\ \omega_1^1=A_{1i}^1\theta^i,\ \omega_2^2=A_{2i}^2\theta^i,\ \omega_3^1=a\theta^1+A_{32}^1\theta^2, \\ \omega_3^2=A_{31}^2\theta^1+a\theta^2,\ d\lambda=\widetilde{A}_i\theta^i,\ d\beta=\beta\omega_2^2+\beta\omega_1^1-\beta\omega_3^3,\end{gathered} \tag{4.10}$$

где $A_{32}^2=A_{31}^1=a$.

Замкнутая система (4.10) в инволюции и определяет комплексы K_{32} с произволом трех функций трех аргументов Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.2. Центр эллипсоида $\widetilde{Q}$ является его характеристической точкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $\frac{1}{2}dF=F_k\theta^k$ где

$$\begin{aligned}F_1\equiv{}&(A_{11}^1+\lambda A_1^2)(x^1)^2+A_{21}^2(x^2)^2+(A_1^2-\widetilde{A}_1+\lambda A_{11}^1+\lambda A_{21}^2)x^1x^2+\\&+(a+\lambda A_{31}^2)x^1x^3+(A_{31}^2+\beta+a\lambda)x^2x^3+x^1+\lambda x^2,\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}F_2\equiv{}&A_{12}^1(x^1)^2+(A_{22}^2+\lambda A_2^1)(x^2)^2+(A_2^1-\widetilde{A}_2+\lambda A_{12}^1+\lambda A_{22}^2)x^1x^2+\\&+(A_{32}^1+\beta+a\lambda)x^1x^3+(a+\lambda A_{32}^1)x^2x^3+\lambda x^1+x^2,\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$F_3\equiv A_{13}^1(x^1)^2+A_{23}^2(x^2)^2+(x^3)^2+(\lambda A_{13}^1+\lambda A_{23}^2-\widetilde{A}_3)x^1x^2. \tag{4.13}$$

Характеристическое многообразие эллипсоида $\widetilde{Q}$ задается следующей системой уравнений

$$F_1=0,\quad F_2=0,\quad F_3=0. \tag{4.14}$$

Из системы (4.14) и формул (4.11),(4.12),(4.13) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Конец вектора $\overline{e}_3$ не может являться характеристической точкой.

О п р е д е л е н и е 5. Комплекс эллипсоидов K_{32}, в котором асимптотическая касательная пересекает эллипсоид $\widetilde{Q}$ в фокальных точках, называется комплексом K_{32}°.

Т е о р е м а 4.3. Комплекс K_{32}° существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения комплекса K_{32}° вытекают следующие соотношения: $A_{22}^2+\lambda A_2^1+1=0$,

$$A_{13}^1=A_{23}^2=0,\ A_{12}^1=A_{21}^2=-\lambda;\ A_{11}^1+\lambda A_1^2+1=0. \tag{4.15}$$

Система уравнений Пфаффа комплекса K_{32}° имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega^3=0,\ \omega_1^2=A_1^2\theta^1,\ \omega_2^1=A_2^1\theta^2,\ \omega_1^3=\beta\theta^2,\ \omega_2^3=\beta\theta^1,\\ \omega_1^1=-\lambda\omega_1^2-\theta^1-\lambda\theta^2,\ \omega_2^2=-\lambda\omega_2^1-\lambda\theta^1-\theta^2,\ \omega_3^1=a\theta^1+A_{32}^1\theta^2,\\ \omega_3^2=A_{31}^2\theta^1+a\theta^2,\ d\lambda=f(A_1^2,A_2^1,\lambda,\beta,A_{32}^1,A_{31}^2,a),\ d\beta=\beta\omega_2^2+\beta\omega_1^1-\beta\omega_3^3.\end{gathered} \tag{4.16}$$

Находя чистое замыкание системы (4.16), получим

$$S_1=5,\quad S_2=2,\quad S_3=0,\quad Q=N=9.$$

Теорема доказана.

Для комплекса K°_{32} доказана

Т е о р е м а 4.4. Характеристические многообразие эллипсоида $\widehat{Q}$ содержится в касательной плоскости к поверхности Φ.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.о-ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия.- Revue de mathématiques pure et appliques, Acad. RPR, VII, № 2, 1962, с.231-240.

3. К р е т о в М.В. Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.10, Калининград, 1979, с.41-47.

4. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

5. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.113-133.

6. К р е т о в М.В. Об одном комплексе центральных квадрик с вырождающимся многообразием центров.Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии.г.Минск, 1979, с.99.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.II 1980

С.В.М а л а х о в с к а я

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМ АВТОПОЛЯРНЫМ ТЕТРАЭДРОМ

В трехмерном проективном пространстве рассмотрим частный класс $\mathfrak{A}$ конгруэнций невырожденных линейчатых квадрик Q, четыре фокальные поверхности которых описаны вершинами автополярного тетраэдра третьего рода квадрики Q .Показано,что две фокальные поверхности конгруэнции $\mathfrak{A}$ являются квадриками.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathfrak{A}$ называется конгруэнция квадрик Q в P_3, обладающая следующими свойствами: 1/ существуют четыре фокальные поверхности $[1](A_\alpha)(\alpha=0,1,2,3)$ такие,что A_0A_i и A_3A_i -прямолинейные образующие квадрики Q $(i,j,k=1,2)$, 2/поверхности (A_0) и (A_3) не вырождаются в линии и не являются плоскостями,причем прямые A_0A_i и A_3A_i -асимптотические касательные соответственно на (A_0) и (A_3) ,3/на квадрике Q не существует фокальных прямолинейных образующих и фокальных коник.

Т е о р е м а 1. Существуют два и только два класса конгруэнций $\mathfrak{A}$:конгруэнции $\mathfrak{A}_1$, определяемые с произволом одной функции двух аргументов,и конгруэнции $\mathfrak{A}_2$, определяемые с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Относя конгруэнцию $\mathfrak{A}$ к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$ и учитывая условия 1,2,3 определения 1 приводим систему пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathfrak{A}$ к виду: